Franz Urban Pappi, Susumu Shikano und Evelyn Bytzek: Der Einfluss politischer Ereignisse auf die Popularität von Parteien und Politikern und auf das Parteiensystem [KZfSS, 56, 2004: 51-70]

Anhang

Konstruktion des gemeinsamen ideologischen Raums aus Skalometer-Daten und Identifizierung der Idealpunkte der Befragten

I. Datenbasis: Skalometer

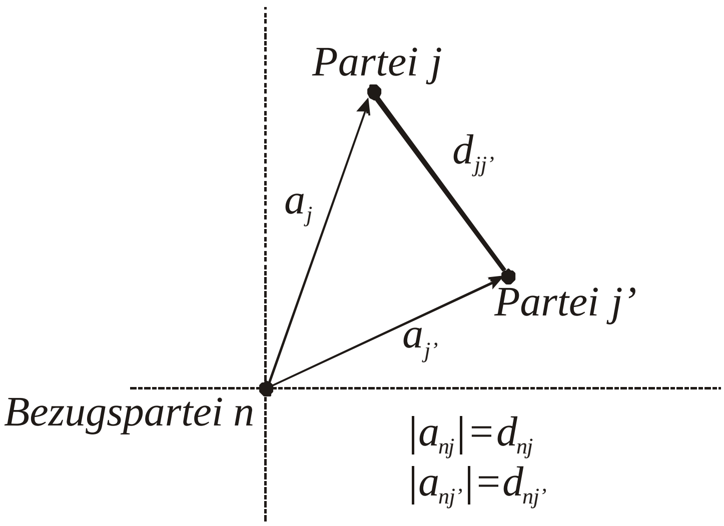
Die Daten, die wir zur Konstruktion des gemeinsamen ideologischen Raums verwenden, sind mit der sog. Skalometer-Frage erhoben, die wie folgt abgefragt wird:

„Stellen Sie sich einmal ein Thermometer vor, das aber lediglich von plus 5 bis minus 5 geht, mit einem Nullpunkt dazwischen. Sagen Sie es bitte mit diesem Thermometer, was Sie von den einzelnen Parteien halten. +5 bedeutet, dass Sie sehr viel von der Partei halten. -5 bedeutet, dass Sie überhaupt nichts von der Partei halten. Mit den Werten dazwischen können Sie Ihre Meinung abgestuft sagen.“

II. Konstruktion des gemeinsamen ideologischen Raums

M Parteien seien in einem unbekannten R-dimensionalen ideologischen Raum projizierbar. Wir definieren a_j als Vektor von einer Bezugspartei n auf eine andere Partei j (siehe *Abbildung 1*) und A als $(M-1) \times R$ Matrix.

Abbildung 1: Projizierte Position der Parteien in einem zwei-dimensionalen ideologischen Raum



Quelle: eigene Darstellung.

Wir definieren außerdem:

(1) $B = A'A$.

Ein Element von B entspricht dem Skalarprodukt von a_j und $a_{j'}$:

(2) $b_{jj'} = a_j \cdot a_{j'}$.

Nach dem Kosinus-Gesetz gilt:

(3) $d^2_{jj'} = d^2_{jn} + d^2_{j'n} - 2\, a_j \cdot a_{j'}$,

weshalb

(4) $b_{jj'} = a_j \cdot a_{j'} = (d^2_{jn} + d^2_{j'n} - d^2_{jj'})/2$.

B ist nämlich von Distanzen zwischen den Parteien replizierbar. Die hier zu analysierenden Daten sind hingegen mit der Skalometer-Frage erhoben. Dies stellt nicht direkt die Distanz zwischen politischen Parteien dar, sondern nur die Einschätzung von einzelnen politischen Parteien. Deshalb sollen die Daten dementsprechend umgewandelt werden.

x_{ij} ist die Position der Partei j für den Wähler i ($i = 1,2, ...,N$) auf der Skalometer-Skala. Wenn jeder Wähler einer Dimension entspricht, ist die quadrierte Distanz zwischen den Parteien, j und j', nach dem Pythagoras'schen Theorem:

(5) $$d^2_{jj'} = \sum_i (x_{ij} - x_{ij'})^2 = \sum_i x_{ij}{}^2 + \sum_i x_{ij'}{}^2 - 2\sum_i x_{ij} x_{ij'}$$

Wenn die Bezugspartei x_{in} ist, dann:

(6) $$d^2_{nj} = \sum_{i=1} (x_{ij} - x_{in})^2 = \sum_i x_{ij}{}^2 + \sum_i x_{in}{}^2 - 2\sum_i x_{ij} x_{in}$$

(7) $$d^2_{nj'} = \sum_{i=1} (x_{ij'} - x_{in})^2 = \sum_i x_{ij'}{}^2 + \sum_i x_{in}{}^2 - 2\sum_i x_{ij'} x_{in}$$

Aus den Gleichungen (4)-(7) folgt:

(8) $$\begin{aligned} b_{jj'} &= (d^2_{nj} + d^2_{nj'} - d^2_{jj'})/2 \\ &= \sum_i x_{ij} x_{ij'} + \sum_i x^2_{in} - \sum_i x_{ij} x_{in} - \sum_i x_{ij'} x_{in} = \sum_i (x_{ij} - x_{in})(x_{ij'} - x_{in}) \end{aligned}$$

Die zu beantwortende Frage ist nun, welche Partei als Bezugspunkt, nämlich n, genommen werden soll. In *Abbildung 1* ist leicht zu finden, dass die Auswahl des Bezugspunkt keine Rolle spielt. Wenn man dort beispielsweise anstatt n die Partei j als Bezugspunkt nähme, verschöben sich nur die Achsen, was die Konstellation der drei Parteien überhaupt nicht beeinträchtigte. Dies ist aber, wie Torgerson (1958: 256) ausführt, nur dann der Fall, wenn die Distanzmessung, d, fehlerfrei ist. In der Praxis ist hingegen die Distanzmessung fehlerbehaftet, so dass die extrahierten Dimensionen vom Bezugspunkt abhängig sind.

Als eine Lösung schlägt Torgerson vor, anstatt eines Objektes, hier einer Partei, den Schwerpunkt als Bezugspunkt zu nehmen (1958: 256ff.). Während dies im Allgemeinen eine vernünftige Lösung ist, bieten unsere Daten an dieser Stelle eine spezifische Lösungsmöglichkeit, die noch einen anderen Bezugspunkt ermöglicht. Wie bereits erwähnt, sind die Daten mit einer Skala, dem Skalometer, erhoben worden.

In diesem Zusammenhang ist die implizite Annahme wichtig, dass der Bezugspunkt fehlerfrei ist (Torgerson 1958: 256). Der Punkt, der für alle Wähler als fehlerfrei gemessen erscheint, ist der Nullpunkt, oder der Mittelpunkt der Skalometer-Skala. Der Punkt bedeutet, dass die Befragten weder viel noch wenig von der entsprechenden Partei halten. Im Vergleich zu diesem Punkt können die Einschätzungen „von einer Partei viel halten“ oder “von einer Partei wenig halten“ individuell verschieden sein.

(9) $$b_{jj'} = \sum_i (x_{ij} - 0)(x_{ij'} - 0)$$

Hierbei wird davon ausgegangen , dass sich x_{ij} um Null symmetrisch erstrecken kann: hier von +5 bis –5.

Nun sind wir vom unbekannten A beim beobachtbaren Skalometer x_{ij} angekommen. Die praktische Inferenz ist hingegen umgekehrt. Wir wollen anhand der Skalometer-Daten B A rekonstruieren. Diese Inferenz ist nach dem Young und Householder-Theorem möglich, wenn die Matrix B positiv semidefinit ist (Young und Householder 1938). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann die Faktorzerlegung der Matrix B durch die Faktorenanalyse durchgeführt werden, wobei die Matrix A der Faktor-Ladung entspricht. Das Ergebnis der Faktorenanalyse lässt sich außerdem durch eine Rotation auf weniger Dimensionen reduzieren und miteinander vergleichbar machen. Siehe dazu Shikano (2002: 118ff.). Wir können deshalb die Beziehung zwischen x_{ij} und a_j wie folgt ausdrücken:

(10) $$x_{ij} = f_i a_j + \boldsymbol{e}_{ij},$$

wobei f_i der Vektor des Faktorenwerts für Wähler i und $\mathring{q}_j$ der Fehlerterm ist. Hier ist zu beachten, dass im Unterschied zur konventionellen Anwendung der Faktorenanalyse x_{ij} nicht nomiert ist. Für die Berechnung des Faktorenwerts gibt es verschiedene Methoden, von denen an dieser Stelle die Bartlettsche Formel verwendet wird (vgl. z.B. Lawley und Maxwell 1963: 90):

(11) $$f_i = (a_j' \hat{\Psi}^{-1} a_j)^{-1} a_j' \hat{\Psi}^{-1} x_{ij}$$

$\hat{\Psi}$ ist dabei die Restvarianz-Matrix, deren diagonale Elemente b_{jj} - $a_{jj} \cdot a_{jj}$ entsprechen. Der Vorzug dieser Formel besteht in $\hat{\Psi}$. Die Faktorenanalyse bevorzugt eine genauere Replizierung des Winkels zwischen den Vektoren zulasten der Länge der einzelnen Vektoren. Mit $\hat{\Psi}$ lassen sich die Ungenauigkeiten der Vektorenlänge berücksichtigen.

III. Identifizierung der Idealpunkte von einzelnen Wählern

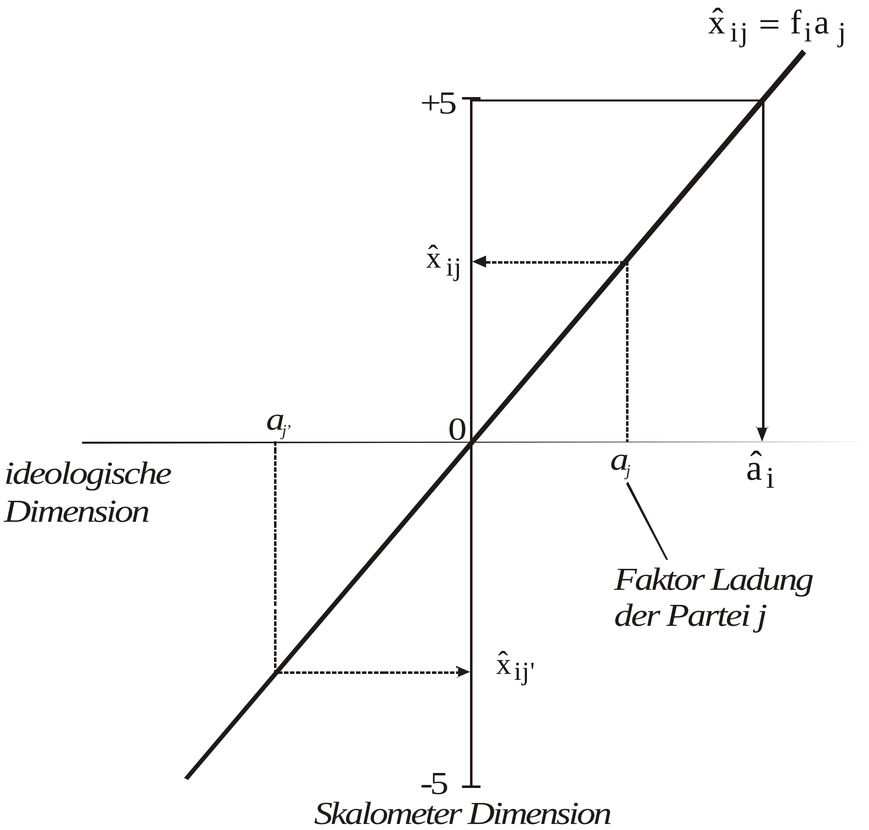
Nun wollen wir die Idealpunkte von einzelnen Wählern im ideologischen Raum identifizieren. Wenn man die Formel (10) in diesem Zusammenhang betrachtet, ist x_{ij}, als Position auf der Skalometer-Skala bereits bekannt. Der Skalometer, der an dieser Stelle verwendet wird, erstreckt sich zwischen –5 und +5, wobei +5 die vom Wähler meist präferierte Partei bedeutet. Deshalb ist auch die Position des Wähler *i* auf dieser Skala, $x_{i.}$, +5. Auch der Faktorenwert für den Wähler *i*, f_i, ist aus der Gleichung (11) empirisch gegeben. Die Formel (10) ist nun wie folgt umzuschreiben, um *a* für den Wähler *i*, $\hat{a}_i$, zu schätzen:

(12) $$f_i^{-1} x_{i.} = \hat{a}_i ,$$

wobei $x_{i.}$ =5.

Wenn wir nur eine ideologische Dimension haben, erleichtert die *Abbildung 2* ein intuitives Verständnis dieser Inferenz (siehe auch Hinich und Munger 1994: 116):

Abbildung 2: Identifizierung des Idealpunkts eines Wählers, wenn r = 1.



Quelle: eigene Darstellung.

Wenn wir zwei Dimensionen im ideologischen Raum haben:

(13) $$f_i = [f_{i1} \quad f_{i2}].$$

Nach der Moore/Penrose generalisierten Inverse gilt:

(14) $$f_i^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{f_{i1}}{f_{i1}^2 + f_{i2}^2} & \dfrac{f_{i2}}{f_{i1}^2 + f_{i2}^2} \end{bmatrix}'$$

Es ist bekannt, dass nur nichtsinguläre quadratische Matrizen eine eindeutige Inverse haben. Allerdings kann (siehe z.B. Ben-Israel und Greville 1974: 7ff.), auch eine nicht-quadratische Matrix A eine generalisierte Inverse X nach Moore/Penrose haben, die die folgenden Gleichungen erfüllt:

AXA=A
XAX=X
(AX)*=AX
(XA)*=XA

* bedeutet die konjugierte Transponierung. Die Matrix X wird die Pseudo-Inverse von A genannt.

Wir können dies auf *k* Dimensionen generalisieren:

(15) $$f_i^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{f_{i1}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} & \dfrac{f_{i2}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} & \cdots & \dfrac{f_{ik}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} \end{bmatrix}'$$

Nun können wir die Koordinaten der Idealpunkte der einzelnen Wähler im ideologischen Raum identifizieren:

(16) $$\hat{a}_i = f_i^{-1} x_{i.} = \begin{bmatrix} \dfrac{5 f_{i1}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} & \dfrac{5 f_{i2}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} & \cdots & \dfrac{5 f_{ik}}{\sum\limits_{k=1} f_{ik}^2} \end{bmatrix}'$$

Literatur

Ben-Israel, Adi, und *Thomas N. E. Greville*, 1974: Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: Wiley.

Hinich, Melvin J., und *Michael C. Munger*, 1994: Ideology and the Theory of Political Choice. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Lawley, D. N., und *Albert E. Maxwell*, 1971: Factor Analysis as a Statistical Method. London: Butterworths.

Shikano, Susumu, 2002: Die soziale Konstruktion politischer Wirklichkeit. Zur kollektiven Deutung der Bundestagswahl 1998 durch Medien und Bürger. Frankfurt a.M.: Campus.

Torgerson, Warren S., 1958: Theory and Methods of Scaling. New York: Wiley.

Young, Gale, und *A. S. Householder*, 1938: Discussion of a Set of Points in Terms of their Mutual Distances. Psychometrika 3: 19-22.